

Justus Liebig Universität Gießen
Mathematisches Institut
Proseminar: Problemlösen
Seminarleitung: Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher
Sommersemester 2007

Mathematisches Problemlösen

oder

die erweiterten Protokolle zur Veranstaltung

Richtberg, Stefan
Studiengang Lehramt an Gymnasien
2. Semester
Fächer: Mathematik, Physik
Frankfurter Str. 101
35392 Gießen
stefanrichtberg@web.de

Inhalt

Wie falte ich eine Ellipse?.....	3
Wie faltet man aus einem Din-A4 Blatt ein gleichseitiges Dreieck?.....	4
Parabelzeichnen ohne Parabellineal.....	5
Das Hölzchenspiel.....	7
Eine Parabel falten	9
Unmögliche Werte.....	10
Schnitte durch einen Tetraeder.....	13
Multiplizieren mit der Normalparabel.....	15
Färbungsmethoden	17
„Eine Teil fällt aus der Reihe“	20
Die Zahlentafeln	23
Die Spinne und die Fliege	26
Die etwas andere Art des Multiplizierens	29
Der Tetraeder im Würfel:	32
Der Würfel im Farbeimer	35
Der Multiplikationstrick mit den Händen	38
Der kürzeste Weg	39
Das Zahlenrätsel	42

Wie falte ich eine Ellipse?

Was ist eine Ellipse?

Definition von Ellipse:

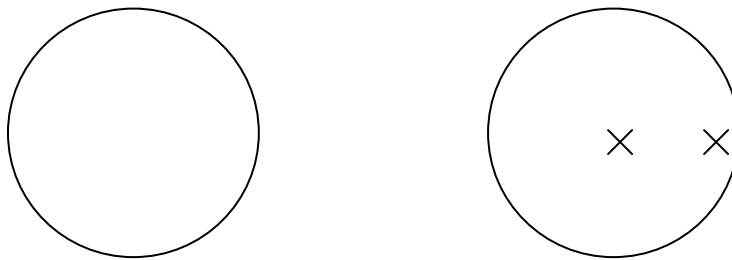
Eine Ellipse ist die Menge von Punkten P , für die der Abstand zu zwei gegebenen festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist. Die Punkte F_1 und F_2 sind die Brennpunkte der Ellipse und der Abstand ist $2a$, also die doppelte Hauptachsenlänge.

Wie hilft uns diese Definition?

Wir kennen eine geometrische Form, die sehr ähnlich definiert ist. Genau, der Kreis. Ein Kreis ist eine Menge an Punkten P , deren Abstand zu einem festen Punkt M konstant ist. Grundlage für eine Ellipse ist also ein Kreis.

Faltanleitung:

Zuerst benötigt man einen nicht zu kleinen Kreis auf einem Blatt Papier. Nun markiert darauf zunächst den Mittelpunkt des Kreises M und einen beliebigen Punkt P der eher am Rand des Kreises liegt. Dieser Punkt P wird der zweite „Mittelpunkt“ der Ellipse.



Dann klappt man den Kreis so ein, dass die Kante den Punkt berührt.
Nun muss man dies noch von möglichst vielen Seiten her machen.

Das Ergebnis:

Faltet man nun den eingefalteten Kreis wieder komplett auf, so erkennt man die Form einer angenäherten Ellipse mit den beiden Brennpunkten M und P .

Was steckt dahinter?

Auch hier sind die Knicke wieder die Tangenten der Ellipse.

Wie faltet man aus einem Din-A4 Blatt ein gleichseitiges Dreieck?

Faltanleitung:

1. Ich lege das Din A4 Blatt im Querformat vor mich hin.
2. Ich knicke das Blatt in der Hälfte, so dass eine Hilfslinie entsteht, die das Blatt teilt.
(Die unteren Ecken A und B auf die oberen Ecken C und D)
3. Ich falte die Ecke C so auf die Hilfslinie, dass an der Ecke B ein Spitzer Winkel entsteht.
4. Ich verlängere den eingeklappten Teil der Kante b gedanklich und klappe die Ecke D daran ein.
5. Als letztes klappe ich die überstehende Ecke A ein.

Handelt es sich hierbei um ein gleichseitiges Dreieck?

Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel 60° .

1. Wenn man das Dreieck gefaltet hat, erkennt man, dass die drei oberen Winkel gleich sind.

$$\alpha = \alpha' = \alpha''$$

Die Winkelsumme im Halbkreis ist 180°

$$180^\circ : 3 = 60^\circ$$

$$\rightarrow \alpha = \alpha' = \alpha'' = 60^\circ$$

2. $\delta = 90^\circ$, da dies der rechte Winkel des Din A4 Blattes ist, $\alpha' = 60^\circ$

Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°

$$180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\rightarrow \beta' = 30^\circ$$

3. $\beta' = 30^\circ$

Der komplette Winkel an der Ecke B ist 90° , da dies der rechte Winkel des Din A4 Blattes ist.

$$90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\rightarrow \beta = 60^\circ$$

4. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$

Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°

$$180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\rightarrow \gamma = 60^\circ$$

$$\rightarrow \alpha = \beta = \gamma$$

Bei dem Dreieck handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck. $\square$

Parabelzeichnen ohne Parabellineal

Das Problem:

Man möchte eine beliebige Parabel auf ein Blatt Papier ohne Koordinatensystem bringen, besitzt aber leider kein Parabellineal.

Das Vorgehen:

Zuerst zeichnet man zwei sich schneidende Linien.

Auf jeder Linie markiert man mindestens drei Punkte im gleichen Abstand und nummeriert Linie a von oben nach unten und Linie b von unten nach oben.

Nun verbindet man gleiche Punkte: 1–1, 2–2, 3–3, ...

Parabel oder nicht?

Vermutungen: (1) Die Figur ist eine Parabel.
(2) Jede Gerade ist eine Tangente.

Um dies zu zeigen, übertragen wir die Figur nun in ein Koordinatensystem.

$y = ax^2$, Der Parameter a der Parabel muss noch bestimmt werden.

Gleichung der Geraden durch $(-1|-1)$ und $(3|1)$

$$y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}$$

Schnittpunkte von Parabel und Gerade:

$$ax^2 = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}$$

$$ax^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2a} x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{4a} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4a}\right)^2 - \frac{1}{2a}}$$

Diese Gleichung hat nur eine Lösung, wenn $\sqrt{\left(\frac{1}{4a}\right)^2 - \frac{1}{2a}} = 0$

$$\left(\frac{1}{4a}\right)^2 - \frac{1}{2a} = 0$$

$$\frac{1}{16a^2} - \frac{1}{2} = 0 \quad | \cdot 16a^2$$

$$1 - 8a = 0$$

$$8a = 1$$

$$a = \frac{1}{8}$$

$$y = \frac{1}{8} x^2$$

Die Gleichung der Parabel ist $y = \frac{1}{8} x^2$

Das Hölzchenspiel

Stellen sie sich vor, sie sitzen am Samstag Abend mit ein paar Freunden in einer Kneipe und trinken Bier. Plötzlich stellen sie fest, das sie nicht genug Geld bei sich haben um das nächste Bier bezahlen zu können. Aber Lust die gesellige Runde zu verlassen um am nächsten Automaten Geld zu holen haben sie natürlich auch keine. Also bleibt nur eine einzige Möglichkeit: ein anderer muss das Bier bezahlen. Aber wie? Jemandem einfach zu erklären, das man gerade kein Geld mehr dabei hat fällt dabei natürlich raus. Was würde das denn für einen Eindruck machen? Aber wie wäre es mit folgendem kleinen Spiel um das nächste Bier?

Das Spiel:

Zum Spielen benötigt man nichts weiter als zwei Spieler und eine Packung Streichhölzer. Streichhölzer finden sich sicher in jeder Kneipe, so das man auch völlig ohne Vorbereitung auf das Hölzchenspiel zurückgreifen kann. Nun legt man eine beliebige Anzahl an Streichhölzern auf den Tisch. Je mehr, desto besser, denn dann wird der gegenüber nicht vermuten, das sie auf jeden Fall gewinnen, sondern davon ausgehen, dass der Zufall beiden Spielern Gewinnchancen bietet. Nun zu den Spielregeln: Die zwei Spieler sind immer abwechselnd an der Reihe und nehmen ganz nach belieben entweder ein oder zwei Hölzchen vom Tisch. Der Spieler, der das letzte Streichholz vom Tisch nimmt hat gewonnen. Also ganz einfach und auch noch für die späteren Abendstunden geeignet.

Beispiel:

Nehmen wir nun mal an ich würde gegen sie eine Runde spielen. Es liegen zu Beginn 11 Streichhölzer auf dem Tisch.

Ich fange an und nehme zwei Streichhölzer. Bleiben noch 9 auf dem Tisch.

Nun sind sie an der Reihe und nehmen auch zwei Streichhölzer. Bleiben 7.

Da es ja langweilig ist immer zwei zu nehmen, nehme ich jetzt nur ein Streichholz vom Tisch. Bleiben noch 6 liegen. Sie nehmen nun auch nur eines weg. Bleiben 5. Jetzt nehme ich wieder zwei Hölzer weg. Bleiben nur noch 3 Streichhölzer auf dem Tisch. Jetzt nehmen sie noch eines, ich nehme die beiden letzten Hölzchen vom Tisch und habe gewonnen.

Trick schon durchschaut? Nein? Keine Sorge, die Erklärung kommt jetzt.

Das Geheimnis des Gewinnens:

Schauen wir uns das Spiel doch nochmals kurz vor seinem Ende an. Es lagen noch drei Hölzchen auf dem Tisch und sie waren am Zug. Nun konnten sie entweder ein Hölzchen nehmen, dann blieben noch zwei auf dem Tisch, oder sie konnten zwei nehmen und es bliebe nur noch eines auf dem Tisch. In beiden Fällen aber kann ich das letzte oder die letzten Hölzchen nehmen. Also habe ich schon zu dem Zeitpunkt gewonnen, als noch drei Streichhölzer auf dem Tisch liegen und ich nicht am Zug bin.

Aber wie erreiche ich diese Spielsituation?

Auch dies ist eigentlich sehr simpel. Wenn wir nochmals in den Spielverlauf von oben schauen finden wir auch einen Zeitpunkt im Spiel, als noch 6 Streichhölzer auf dem Tisch liegen und sie am Zug sind. Nehmen sie nun ein Hölzchen weg, so bleiben noch 5 auf dem Tisch und ich nehme zwei, so dass nur noch 3 Streichhölzer auf dem Tisch bleiben und ich gewonnen habe. Nehmen sie aber zwei Hölzchen weg, so nehme ich nur eines und wieder bleiben 3 auf dem Tisch liegen und ich habe auf jeden Fall gewonnen. Man erkennt, wenn noch 6 Streichhölzer auf dem Tisch liegen und der Gegner am Zug ist, hat man gewonnen. So kann man die Reihe nach oben beliebig fortsetzen. Die nächst höhere „Gewinnzahl“ wäre die 9, dann die 12 usw. Also hat man immer gewonnen, wenn die Anzahl der Streichhölzer auf dem Tisch ein Vielfaches von 3 ist und der Gegner den nächsten Zug hat.

Spielvarianten:

Nachdem sie sich jetzt ganz sicher immer ein Freibier erspielen können betrachten wir das Hölzchenspiel ein wenig allgemeiner. Es lässt sich schließlich nicht nur in dieser einen Variante spielen. So kann man zum Beispiel auch festlegen, dass die Spieler 1-3 Hölzchen nehmen müssen. Allerdings ändern sich damit auch unsere Gewinnzahlen. Schließlich könnte ja der Gegner nun alle 3 Streichhölzer nehmen, wenn noch 3 auf dem Tisch liegen. Aber wenn noch 4 Hölzer auf dem Tisch und der Gegner am Zug ist hat man gewonnen.

Schließlich muss er mindestens eines nehmen, kann aber höchstens drei wegnehmen und so kann man dann auf jeden Fall den Tisch abräumen. Also sind unsere Gewinnzahlen nun nicht mehr Vielfache von drei, sondern Vielfache von 4.

Ganz allgemein ausgedrückt kann man festhalten: Wenn jeder Spieler 1 - n Hölzchen vom Tisch nehmen muss, so sind unsere Gewinnzahlen immer Vielfache von $n+1$.

Eine Parabel falten

Die Aufgabe:

Man besitzt nicht weiter als ein ganz normales weißes Din-A4 Blatt Papier. Auf diesem soll man nun ohne die zu Hilfenahme eines Stiftes, Lineals oder Parabellineals eine Parabel deutlich machen. Dazu bleibt also als einziges Mittel das Falten. Aber wie kann ich aus einem leeren Papier eine Parabel falten?

Wie kann ich aus einem Din A4 Blatt eine Parabel falten?

Zunächst einmal legt man das Din A4 Blatt im Querformat vor sich auf einen Tisch.

Dann faltet man es so, dass man ein Blatt Din A5 Format vor sich liegen hat, also einmal in der Mitte und zwar so, dass sich ein vertikaler, senkrechter Knick bildet; unsere Mittellinie.

Als nächstes klappt man das Ganze wieder auf.

Jetzt faltet man die untere Kante des Blattes nach oben. Und zwar so, dass ungefähr 3 cm Papier nach oben geklappt werden.

An dem Punkt, an dem die neue Kante nun die Mittellinie trifft, setze man eine Markierung. Dies ist der Brennpunkt der Parabel.

Nun faltet man das Blatt wieder auf und faltet dann die untere Kante so nach oben, dass sie durch den Brennpunkt geht.

Je öfter man nun die Kante nach oben faltet, desto mehr sieht man von der Parabel.

Was steckt dahinter?

Die neuen, durch das Falten entstandenen Knicke sind die Tangenten der Parabel.

Unmögliche Werte

Welche Werte sind unmöglich?

Wir betrachten bei diesem Problem nur Polynome mit ganzzahligen Exponenten.

Nun soll folgender Sachverhalt gelten:

Nimmt ein solches Polynom an drei verschiedenen ganzzahligen Stellen a, b, c den Funktionswert 2 an, so gibt es keine ganzzahlige Stelle d, an der das Polynom den Funktionswert 3 annimmt.

Mathematisch ausgedrückt lässt sich dies folgendermaßen schreiben:

Sei f ein Polynom mit nur ganzzahligen Exponenten und seien a, b, c, d ganze Zahlen.

Falls nun $f(a), f(b), f(c) = 2$ dann existiert kein d, für das gilt $f(d) = 3$.

Ein Beispiel:

Suchen wir uns doch nun mal ein einfaches Polynom mit nur ganzzahligen Exponenten, das an drei verschiedenen ganzzahligen Stellen den Funktionswert 2 liefert.

Zum Beispiel $f(x) = x * (x-1) * (x+3) + 2$

Dieses Polynom liefert uns an den Stellen $x = 0$, $x = 1$ und $x = -3$ den Funktionswert 2.

Wenn nun der Satz von oben stimmen sollte, darf das Polynom für keinen ganzzahligen x-Wert den Funktionswert 3 annehmen. Überprüfen wir das doch mal an unserem Beispiel mit Hilfe einer Wertetabelle:

x	f(x)
-4	-18
-3	2
-2	8
-1	6
0	2
1	2
2	12
3	38

Also scheint der Satz zu mindest in unserem Beispiel zu stimmen, da der Graph für noch kleinere x-Wert immer weiter ins Minus und für größere x-Werte immer weiter in Positive läuft.

Doch der Satz soll ja für jeden Polynom diesen Typs gelten und nicht nur für uns gewähltes Beispiel. Doch wie kann man dies allgemein zeigen?

Zum Beweis:

Der Beweis dieses Satzes ist nicht einfach. Es lassen sich zwar unendlich viele solcher Polynome finden, bei denen der Satz zutrifft und kein einziges Gegenbeispiel, aber direkt aus sich selbst heraus kann man ihn wohl gar nicht beweisen.

Für den Beweis benötigt man den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz:

Seien p und q beides ganze Zahlen und f ein ganzzahliges Polynom. Dann gilt folgende Aussage: $p - q \mid f(p) - f(q)$. Das Zeichen $\mid$ bedeutet mathematisch „ist ein Teiler von“. Umgekehrt gesagt: $f(p) - f(q)$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von $p - q$.

Auf den Beweis dieses schon an sich sehr interessanten Hilfssatzes soll an dieser Stelle verzichtet werden.

Beweis:

Nun kann der Beweis unter Einbeziehung des Hilfssatzes gelingen. In unserem Fall wählen wir den Beweistyp des Widerspruchsbeweises. Bei diesem wird angenommen, dass die Aussage des zu beweisenden Satzes nicht gilt und diese Annahme dann zu einem Widerspruch geführt. Damit ist dann gezeigt, dass der Satz gelten muss.

In unserem Fall nehmen wir also für den Beweis an, dass es ein entsprechendes d gibt, für das gilt $f(d) = 3$.

Etwas formaler notiert ergibt sich für den Beginn des Beweises folgendes Bild:

Zu zeigen: Sei f ein Polynom mit nur ganzzahligen Exponenten und seien a, b, c, d ganze Zahlen. Falls nun $f(a), f(b), f(c) = 2$ dann existiert kein d , für das gilt $f(d) = 3$.

Annahme: Es existiert ein ganzzahliges d mit $f(d) = 3$.

Nun wendet man den oben aufgeführten Hilfssatz auf d und a an:

Daraus ergibt sich: $d - a \mid f(d) - f(a)$

$\leftrightarrow d - a \mid 3 - 2$

$\leftrightarrow d - a \mid 1$

Da die Zahl 1 nur sich selbst und -1 als Teiler hat folgt daraus:

$\rightarrow d - a = 1 \vee d - a = -1$

Nun wendet man den Hilfssatz auf d und b an:

Daraus ergibt sich: $d - b \mid f(d) - f(b)$

$\leftrightarrow d - b \mid 3 - 2$

$\leftrightarrow d - b \mid 1$

Da die Zahl 1 nur sich selbst und -1 als Teiler hat folgt daraus:

$\rightarrow d - b = 1 \vee d - b = -1$

Aus diesen beiden Ergebnissen und der Anfangsbedingung, dass a, b, c, d verschieden sind, folgt ein Widerspruch falls sowohl $d - a = 1$ als auch $d - b = 1$ gilt oder falls sowohl $d - a = -1$ als auch $d - b = -1$ gilt, da in beiden Fällen dann $a = b$ gelten würde.

Nun wendet man noch den Hilfssatz auf c und d an und erhält daraus wie oben:

$$d - c = 1 \vee d - c = -1$$

Daraus folgt nun, dass zwei der Werte $d - a$, $d - b$, $d - c$ gleich sein müssen

Dies ist ein Widerspruch zu den Bedingungen, die am Anfang gestellt wurden.

Damit gilt der Satz „Sei f ein Polynom mit nur ganzzahligen Exponenten und seien a, b, c, d ganze Zahlen. Falls nun $f(a), f(b), f(c) = 2$ dann existiert kein d, für das gilt $f(d) = 3$ “ als bewiesen.

Gibt es noch weitere unmögliche Werte?

Ja, die gibt es. Ebenso wie kein ganzzahliges x den Funktionswert 3 ergeben kann, kann es auch kein ganzzahliges x geben, für das sich der Funktionswert zu 1 ergibt.

Der Beweis hierfür gelingt ganz einfach, wenn man den Beweis für $f(d) = 3$ schon durchgeführt hat. Man erhält nämlich jetzt ja für $f(d)$ den Wert 1 anstatt 3 und somit nach Anwendung des Hilfssatzes immer $d - a \mid -1$ bzw. $d - b \mid -1$ bzw. $d - c \mid -1$.

Da aber -1 auch wieder nur die beiden Teiler 1 und -1 besitzt läuft der weitere Beweis analog zu dem oben aufgeführten Beweis mit $f(d) = 3$.

Damit gilt insgesamt:

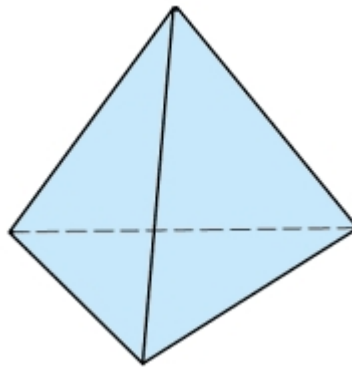
Sei f ein Polynom mit nur ganzzahligen Exponenten und seien a, b, c, d ganze Zahlen.

Falls nun $f(a), f(b), f(c) = 2$ dann existiert kein d, für das gilt $f(d) = 3$ oder $f(d) = 1$.

Schnitte durch einen Tetraeder

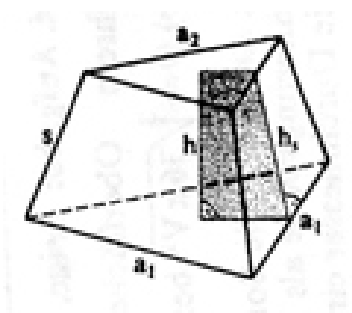
Die Frage:

Welche Schnittflächen kann ich bei einem ebenen Schnitt durch einen regelmäßigen Tetraeder erhalten?



Die Ergebnisse:

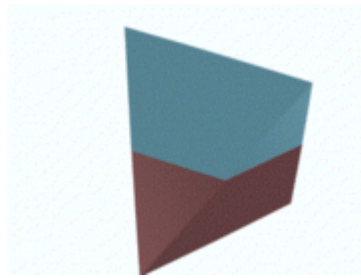
Am einfachsten ist es natürlich, wenn ich einfach eine Spitze des Tetraeder abschneide. Also einen ebenen Schnitt parallel zur Grundfläche setze, der durch genau drei Kanten des Tetraeder geht. Dann erhalte ich einen so genannten Tetraederstumpf als Ergebnis meines Schnittes. Die sich daraus ergebende Schnittfläche ist genau wie die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck:



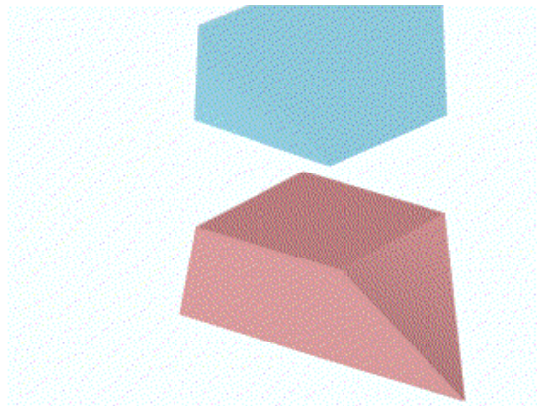
Setze ich den Schnitt nun nicht parallel zu Grundfläche an, sondern schräg, aber immer noch so, dass ich genau drei Kanten des Tetraeders durchtrenne, erhalte ich noch immer ein Dreieck als Schnittfläche. Doch logischerweise ist dieses nun nicht mehr gleichseitig.

Allerdings kann man den Tetraeder auch so durchschneiden, dass unsere Schnittebene nicht nur drei Kanten durchtrennt, sondern sogar vier. Dazu dreht man am einfachsten den

Tetraeder mit einer Kante nach unten und schneidet dann parallel zu dieser Kante waagrecht ein. Also wie im folgenden Bild dargestellt:



Nun wird schon deutlich, dass wir wohl keine dreieckige Schnittfläche mehr erhalten. Aber welche Fläche erhalten wir den nun? Die Antwort wird deutlich, wenn wir die beiden Stücke nun auseinanderdrehen:

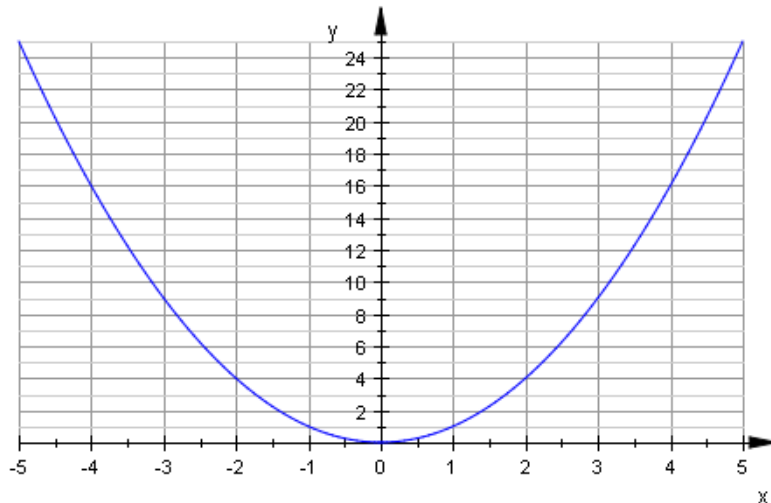


Somit wird deutlich, dass ich nun eine viereckige Schnittfläche erhalte. Wenn die Schnitthöhe dann noch wie hier in den Bildern richtig gewählt wurde (genau in der Mitte, so dass der Abstand zu den beiden parallelen Kanten gleich ist), erhält man sogar ein Quadrat als Schnittfläche, dessen Kantenlänge genau halb so lang ist, wie die Kantenlänge des ursprünglichen Tetraeders.

Multiplizieren mit der Normalparabel

Wie kann man mit einer Graphik rechnen?

Zeichnen wir doch zu beginn einfach mal die Normalparabel in ein Koordinatensystem:

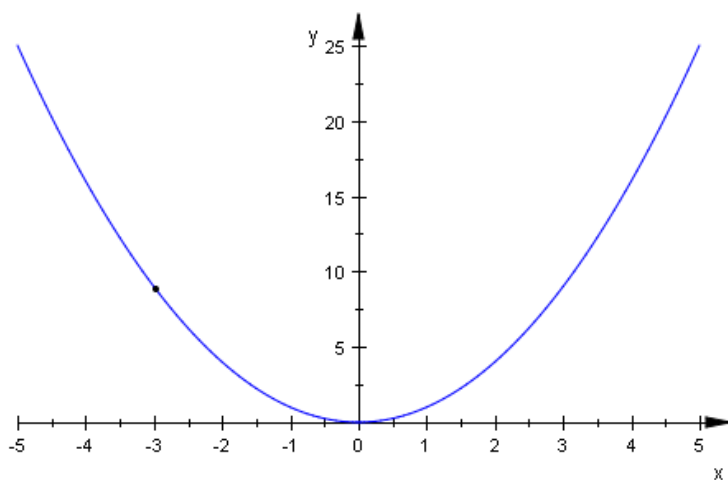


Nun suchen wir uns ein passendes Beispiel. Hierbei ist zu beachten, das man nur zwei positive oder zwei negative Zahlen mit Hilfe der Normalparabel direkt multiplizieren kann. Das bedeutet, dass man nur dann das Ergebnis der Multiplikation direkt ablesen kann. Multipliziert man eine positive mit einer negativen Zahl, so muss man vor das abgelesene Ergebnis noch ein Minuszeichen setzen.

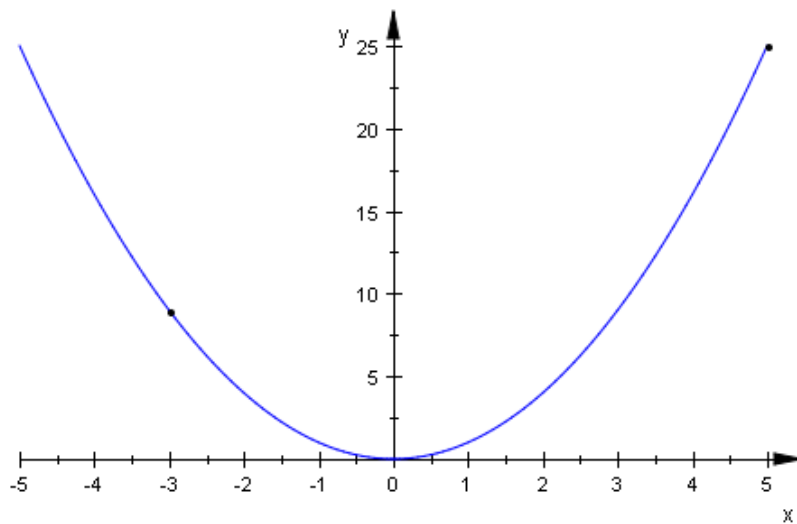
Wählen wir in unserem Fall doch einfach mal das Beispiel $3 * 5$:

Als erstes geht man jetzt für die 3 um drei Einheiten nach links und dann zu unserem entsprechenden Funktionswert. Hier, also bei $(-3 / 9)$ machen wir einen Punkt.

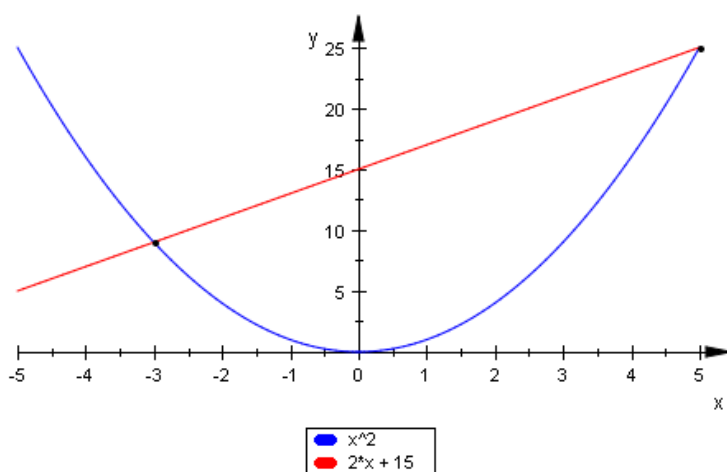
Dann sieht unser Graph so aus:



Nun gehen wir für die 5 genau fünf Einheiten nach rechts und wieder zu dem entsprechenden Funktionswert der Parabel. Auch hier machen wir jetzt einen Punkt; also bei (5 / 25).



Nun müssen wir nur noch diese beiden Punkte durch eine Gerade miteinander verbinden und erhalten:



Wie unschwer zu erkennen ist gibt uns der Schnittpunkt der gerade mit der y- Achse, also unser y-Achsenabschnitt, genau das Ergebnis unserer Multiplikation, den $3 * 5 = 15$

Färbungsmethoden

Das Problem:

Kann man ein handelsübliches 8x8 Schachfeld mit 2x1 Dominosteinen (das bedeutet, das ein Dominostein zwei Felder in eine Richtung und ein Feld in die andere Richtung abdeckt) komplett, lückenlos und überschneidungsfrei überdecken?

Die Antwort fällt leicht. Schließlich kann man ja einfach jede Reihe mit 4 Dominosteinen genau abdecken. Macht man das nun für jede Spalte so, kann man mit 32 Steinen das ganze Feld wie gefordert abdecken.

Aber was passiert, wenn ich nun ein Eckfeld des Schachbrettes wegnehme?

Auch hier wird einem die Antwort nach kurzen Nachdenken sicherlich einfallen. Schließlich hat das Schachbrett ja nun nicht mehr 64 Felder, sondern nur noch 63. Da aber ein Dominostein immer zwei Felder abdeckt, kann ich nun dieses modifizierte Schachfeld nicht mehr wie gefordert abdecken. Schließlich ist 64 einfach nicht ohne Rest durch 2 teilbar.

Nun nehmen wir nun eine zweite Ecke des Schachfeldes weg. Und zwar genau die Ecke, die der ersten weggenommenen gegenüber liegt.

Lässt sich das Feld nun wieder komplett abdecken?

Die Lösung:

Hier fällt die Antwort schon wesentlich schwerer. Dafür, dass es möglich ist, spricht, dass man ja nun ja wieder eine gerade Anzahl von Felder, nämlich 62, hat und 62 ohne Rest durch 2 teilbar ist. Doch stimmt die daraus gewonnene Vermutung? Wer es ausprobiert kommt schnell zu dem Schluss, das die Vermutung falsch ist. Um mit logischer Argumentation zu diesem Ergebnis zu bekommen muss man sich die Felder auf dem Schachbrett nochmals genauer anschauen. Das Schachbrett besitzt weiße und schwarze Felder. Neben einem schwarzen liegt immer ein weißes. Insgesamt kommt man so auf 32 schwarze und 32 weiße Felder. Wenn man nun die erste Ecke wegnimmt, z.B. eine schwarze, so hat man nur noch 31 schwarze und 32 weiße Felder. Nimmt man nun noch die gegenüberliegende Ecke weg, so nimmt man wieder eine schwarze Ecke weg. Somit bleiben zum Abdecken 30 schwarze und 32 weiße Felder. Doch ein Dominostein deckt immer zwei nebeneinander liegende Felder und

somit ein schwarzes und ein weißes Feld ab. Da man aber nun unterschiedlich viele schwarze und weiße Felder hat, lässt sich das Feld logischerweise nicht überdecken.

Mathematisch betrachtet:

In der Mathematik nennt man ein solches Vorgehen zur Lösung eines Problems Färbung. Mit Hilfe dieser Methode lässt sich auch die Verallgemeinerung unseres oben beschriebenen Problems lösen. Die Frage lautet nun: Kann man ein $m \times n$ –Brett mit 1×1 Steinen lückenlos und überschneidungsfrei überdecken?

Beispiel:

Wählen wir doch erstmal ein Beispiel mit $l = 4$.

Dann lässt sich folgendes feststellen:

Notwendige Bedingung: Wenn das $m \times n$ –Brett durch 4×1 Steine überdeckt werden kann, muss $m * n$ ein vielfaches von 4 sein.

Beweis: Wäre $n * m = 4 + \text{Rest } r$ mit $0 < r < 4$, so würden immer mindestens r - Felder nicht überdeckt.

Dies ist aber noch nicht hinreichend für die vollständige Überdeckung. Schließlich wäre bei einem 2×2 Feld $n * m = 4$ und somit ein Vielfaches von 4, aber das Feld würde sich trotzdem nicht wie gefordert überdecken lassen.

Somit ergibt sich die hinreichende Bedingung: Wenn 4 Teiler von m oder n ist kann man das Brett überdecken.

Beweis: O.B.d.A. sei $n = k * 4$. Dann lässt sich jede Zeile durch genau k Steine überdecken.

Zusammen lässt sich dies in einen mathematischen Satz fassen:

Satz: Wenn man ein $(m \times n)$ Feld mit (4×1) Steinen überdecken kann, muss m oder n ein Vielfaches von 4 sein.

Beweisansatz: Wir zeigen durch systematische Färbung, dass man ein $(m \times n)$ Feld nicht durch (4×1) Steine überdecken kann, wenn weder m noch n ein Vielfaches von 4 ist.

Wir färben das Brett mit genau 4 Farben. Und zwar genau so, dass ein Stein immer genau ein Feld jeder Farbe abdeckt. Dazu fangen wir links oben an und färben nach rechts und nach unten.

Beweis: Sei nun $m = k*4+a$ mit $0 < a < 4$ und $n = i*4+b$ mit $0 < b < 4$

So kommt in den ersten $k*4$ Zeilen jede Farbe gleich oft vor, nämlich k -mal.

Ebenso kommt in den ersten $i*4$ Spalten jede Farbe gleich oft, nämlich i -mal, vor.

Somit bleibt unten rechts ein Rechteck der Größe $a \times b$. In diesem Rechteck kommt jede Farbe in jeder Reihe und jeder Spalte höchstens 1x vor, da ja a und $b < 4$.

Sei nun o.B.d.A. $b \geq a$.

Somit kommt in jeder Reihe die Farbe b vor. In der ersten Reihe kommt allerdings die Farbe 4 nicht vor, da ja $b < 4$. Daraus folgt, dass die Farbe b in dem unteren Rechteck häufiger vorkommt als die Farbe 4. Da nun ja jeder (4×1) Stein immer genau ein Feld jeder Farbe abdeckt, kann nun das Rechteck nicht komplett überschneidungsfrei abgedeckt werden, da nicht jede Farbe gleich oft vorkommt. q.e.d.

Verallgemeinerung:

Nach diesem Beweis mit (4×1) Steinen lässt sich nun auch einfach der Beweis für ein $(m \times n)$ Feld mit $(L \times 1)$ Steinen finden. Hier färben wir nun nicht mehr mit vier Farben, sondern mit L verschiedenen Farben. Auch hier bleibt dann unten Rechts ein Rechteck der Größe $a \times b$.

In diesem Rechteck kommt dann auch die Farbe b häufiger vor als die Farbe L und somit lässt sich dieses Rechteck dann nicht abdecken.

Damit gilt der folgende Satz als bewiesen:

Satz: Wenn man ein $(m \times n)$ Feld mit $(L \times 1)$ Steinen überdecken kann, muss m oder n ein Vielfaches von L sein.

„Eine Teil fällt aus der Reihe“

Die Aufgabe:

Man besitzt eine ganz normale Balkenwaage, an die man auf beiden Seiten beliebige Gewichte oder Gegenstände hängen kann. Ist eine Seite schwerer als die andere so wird dies dadurch deutlich, dass sich diese nach unten neigt.

Nun die Aufgabe: Man hat 27 äußerlich nicht unterscheidbare Münzen. Von diesen Münzen ist eine einzige Münze schwerer als die anderen. Nun soll man diese eine Münzen mittels möglichst wenigen Wägungen herausgefunden werden.

Wie könnte man an das Problem herangehen:

Mit Sicherheit gibt es mehrere Möglichkeiten die falsche Münze herauszufinden. Führen wir doch einfach mal ein paar Möglichkeiten auf:

- Man wählt eine beliebige Münze aus dem Stapel der 27 aus und legt sie auf einer Seite auf die Balkenwaage. Nun nimmt man nacheinander immer eine Münze der restlichen 26 und legt sie auf der anderen Seite auf die Balkenwaage. Zeigt die Balkenwaage nun einen Ausschlag in eine Richtung, so hat man die schwerere Münze gefunden. Befindet sich die Balkenwaage im Gleichgewicht, so hat man nun sicher eine normale Münze gefunden, legt diese bei Seite und macht mit der nächsten Münze aus dem Stapel weiter. So hat man nach spätestens 25 Wägungen die schwerer Münze gefunden. Den entweder die Waage hat bis dahin einen Ausschlag gezeigt, oder die letzte noch übrige Münze ist die falsche.
- Man wählt zwei beliebige Münzen aus dem Stapel aus und legt je eine auf eine Seite der Balkenwaage. Ist eine Seite schwerer als die andere, so hat man schon die falsche Münze gefunden. Befindet sich die Waage weiter im Gleichgewicht, so hat man zwei normale Münzen identifiziert, legt diese bei Seite und nimmt zwei neue Münzen aus dem Stapel der restlichen 25. Somit hat man nach spätestens 13 Wägungen die falsche Münze identifiziert, den entweder war eine der Wägungen nicht im Gleichgewicht oder die letzte noch nicht gewogene Münze ist die schwerere.
- Aber man kann ja nun auch mehr als nur eine Münze auf eine Seite der Balkenwaage legen. So teilt man nun die 27 Münzen in zwei 13er Stapel auf und legt die letzte Münze bei Seite. Auf jede Seite der Balkenwaage kommt nun einer der beiden Stapel. Ist die Waage im Gleichgewicht, so ist die ist die falsche Münze die zur Seite gelegte.

Wenn nicht ist die schwerer in dem Stapel, der nach unten geht. Dann teilt man den 13er Stapel wieder in zwei 6er Stapel und legt eine Münze bei Seite und verfährt nach dem Prinzip von oben. Im nächsten Schritt hat man dann noch zwei 3er Stapel und erfährt durch das wiegen in welchem die schwere Münze ist. Bei den drei Münzen legt man wieder je eine auf jede Seite und die letzte bei Seite. Danach kann man nun sicher sagen, welche Münze die falsche ist. Also nach maximal vier Wägungen hat man hier die falsche Münze. Schon eine gewaltige Arbeitersparnis gegenüber den 25 Wägungen bei der ersten Möglichkeit.

Die Lösung:

Aber es geht noch schneller. Und zwar liegt der Trick in geschicktem aufteilen der Münzen in Stapel. Bei dem Ansatz oben werden bei der ersten Wägung mindestens 14 Münzen ausgeschlossen, die nicht zu schwer sein können (mindestens die 13 im leichten Stapel und die eine bei Seite gelegte). Wenn wir aber nun den Stapel nicht in zwei 13er und einen 1er Stapel, sondern in drei 9er Stapel aufteilen, so lassen sich mit einer Wägung immer 18 Münzen ausschließen, die nicht zu schwer sein können. Wenn die Waage im Gleichgewicht ist, so kann in beiden 9er Stapel auf der Balkenwaage nirgends die falsche Münze sein, sondern sie muss in dem 9er Stapel sein, der an der Seite liegt. Ist ein Stapel schwerer als der andere, so befindet sich die schwere Münze in diesem und mit Sicherheit nicht in den anderen beiden.

Somit muss man nur noch 9 Münzen untersuchen. Auch diese werden wieder aufgeteilt. Und zwar wieder in drei gleich große Stapel. Nun legt man wieder drei Münzen auf die eine Seite und drei auf die andere. Nach dieser Wägung bleiben nur noch drei Münzen übrig, von denen eine Münze die schwere sein muss. Mit der dritten Wägung findet man dann diese ganz einfach heraus. So braucht man auf diese Art und Weise nur ganze drei Wägungen um die falsche Münze aus dem riesigen Stapel herauszufinden. Schon verblüffend wie viel Arbeit man sich mit einem guten System sparen kann.

Verallgemeinerung:

Natürlich funktioniert das System auch mit mehr oder weniger als 27 Münzen. Um auf die allgemeine Lösung des Problems zu kommen schauen wir uns doch nochmals unser Vorgehen an. Wir teilen die Münzen immer in genau drei gleich große Stapel. Also spielt die 3 in unserer Lösung schon mal irgendeine Rolle. Dann wissen wir, dass wir mit einer Wägung die Münze aus 3 Münzen sicher bestimmen können. Um aus 9 Münzen die falsche sicher

identifizieren zu können brauchen wir 2 Wägungen mit der Balkenwaage. Und schließlich für 27 Münzen 3 Wägungen. Also in einer Liste geschrieben:

Aus 3 Münzen $\rightarrow$ 1 Wägung

Aus 9 Münzen $\rightarrow$ 2 Wägungen

Aus 27 Münzen $\rightarrow$ 3 Wägungen

Wie man leicht erkennt wird die Zahl der Münzen immer mit 3 multipliziert, wenn die Anzahl der Wägungen um eins erhöht wird. Somit ergibt sich für den allgemeinen Fall:

Aus 3^n Münzen $\rightarrow$ n Wägungen

Münzanzahl ist keine Dreierpotenz

Entspricht die Zahl der gegebenen Münzen nun nicht exakt einer solchen Dreierpotenz, so sind für das Herausfinden der falschen Münze immer so viele Wägungen nötig, wie für die nächst höhere Dreierpotenz nötig wären. Also bräuchte man um die schwerere Münze aus 22 Münzen herauszufinden ebenfalls 3 Wägungen. Man teilt hier die Münzen in zwei Stapel a 7 Münzen, legt diese auf die Balkenwaage und legt die restlichen acht Münzen bei Seite. Ist die schwere in einem der Siebenerstapel, teilt man diese in zwei 3er Stapel und legt die letzte bei Seite. Ist die schwere in dem 8er Stapel, so teilt man den in zwei 3er und einen 2er Stapel und legt wieder die beiden gleichen Stapel auf die Waage. So hat man auch hier spätestens nach 3 Wägungen die schwere Münze identifiziert.

Die Zahlentafeln

Das Problem:

Auf einem Tisch liegen 5 Zahlentafeln mit folgendem Aussehen:

1;3;5;7;9;11;13; 15;17;19;21;23; 25;27;29;31;33;	2;3;6;7;10;11; 14;15;18;19;22; 23;26;27;30;31	4;5;6;7;12;13; 14;15;20;21;22; 23;28;29;30;31
8;9;10;11;12;13; 14;15;24;25;26; 27;28;29;30;31	16;17;18;19;20; 21;22;23;24;25; 26;27;28;29;30; 31	

Nun soll man sich eine beliebige Zahl zwischen 1 und 32 aussuchen und die Zahlentafeln nennen, auf denen die gewählte Zahl steht. Sofort, wie aus der Pistole geschossen, kommt nun vom Gegenüber die geheim gewählte Zahl. Aber wie ist das möglich? Hat der Gegenüber etwa auswendig gelernt welche Zahl zu der Kombination an Tafeln passt?

Wie funktioniert das?

Wie man sehr schnell merkt sind die Tafeln nach einem gewissen Prinzip aufgebaut.

Auf der ersten Tafeln stehen nur ungerade Zahlen. Oder anders ausgedrückt, auf ihr steht nur jede zweite Zahl und die andere Hälfte fehlt (Null zählt hier als erste Zahl, die gleich weggelassen wird).

Auf der zweiten Tafel sind nun gerade und ungerade Zahlen. Aber auch hier lässt sich ein Muster erkennen. Es sind immer zwei Zahlen weggelassen und die nächsten beiden finden sich dann wieder auf der Tafel.

Nach diesem Prinzip geht es auf der dritten Tafel weiter, nur das hier jetzt immer im Viererrhythmus vorgegangen wird. Vier weglassen, vier hinschreiben.

Auf der vierten Tafel wird ein Achterrhythmus angewendet und auf der fünften und letzten Tafel schließlich werden die ersten 16 Zahlen nicht notiert, dann aber die nächsten 16 alle.

Doch wie bringt uns diese seltsame Tafeleinteilung nun näher an das Geheimnis?

Nun schreiben wir uns die verschiedenen Rhythmen doch nochmals auf:

1er Rhythmus, 2er Rhythmus, 4er Rhythmus, 8er Rhythmus, 16er Rhythmus....

Genau, der Rhythmus verdoppelt sich immer. Und in welchem System wird genau mit dieser Verdopplung gearbeitet? Richtig, im Binärsystem.

Hier eine Kurzerklärung dieses Systems, welches z.B. von Computern verwendet wird:

Das Binärsystem besteht, wie schon der Name erraten lässt, nur aus zwei Elementen. Wir nennen der Einfachheit halber ein Element Null und das andere Element Eins. Mit Hilfe dieser Elemente können wir nun die Zahlen 0 und 1 problemlos darstellen. Für alle anderen Zahlen allerdings müssen wir allerdings Kombinationen aus Nullen und Einsen finden um diese darzustellen, da wir ja nur diese beiden Elemente zu Verfügung haben. Hier kommt nun der sich immer verdoppelnden Rhythmus ins Spiel. Denn genau mit dessen Hilfe stellt man große Zahlen im Binärsystem dar. So gibt das Element (Eins oder Null) ganz rechts an, ob die darzustellende Zahl einen Einer oder keinen Einer hat. Das zweite Element von rechts, ob es einen Zweierbaustein hat oder nicht, die dritte trifft diese Aussage über den Viererbaustein, die vierte über den Achter-, die fünfte über den 16er-Baustein usw.

So lässt sich die Binärzahl 10101 wie folgt in eine Dezimalzahl umwandeln:

Die Zahl besitzt einen Einer-, keinen Zweier-, einen Vierer-, keinen Achter- und einen 16er-Baustein. Somit ergibt sich die Zahl zu $1+4+16=21$

Ein weiteres Beispiel wäre die Binärzahl 11000, welche sich auf gleiche Weise wie oben zu $16+8=24$ ergibt.

Und wie hilft uns das Binärsystem?

Betrachtet man nun nochmals unsere fünf Zahlentafeln und schreibt sich die darauf vorkommenden Zahlen im Binärsystem auf, so fällt einem auf, dass alle Zahlen auf der ersten Tafel einen Einerbaustein haben, alle auf der zweiten einen Zweierbaustein, auf der dritten einen Viererbaustein, auf der vierten einen Achterbaustein und auf der letzten einen 16er-Baustein haben.

Diese Erkenntnis erklärt uns nun, warum man mit Hilfe der Tafeln sofort weiß, welche Zahl sich gemerkt wurde. Durch die Tafeln, auf welchen sich die ausgewählte Zahl befindet erhält man quasi direkt gesagt, aus welchen Bausteinen die Zahl besteht und muss sie nur noch aus

dem Binärsystem zurückübersetzen um den Gegenüber sofort mit der richtigen Antwort zu verblüffen.

Beispiel:

Nehme man nun mal an, dass der Gegenüber die Zahl 25 gewählt hat.

Dann muss er sagen, dass die Zahl sich auf der ersten Tafel befindet, auf der vierten und der letzten.

Somit weiß man, dass die gewählte Zahl einen Einerbaustein, keinen Zweier- und Viererbaustein, dafür aber wieder je einen Achter- und 16er-Baustein hat.

Daraus folgt sofort durch leichtes Kopfrechnen: $1+8+16=25$

Somit kann jeder diesen Trick sehr schnell erlernen ohne alle möglichen Kombinationen auswendig wissen zu müssen.

Man beachte:

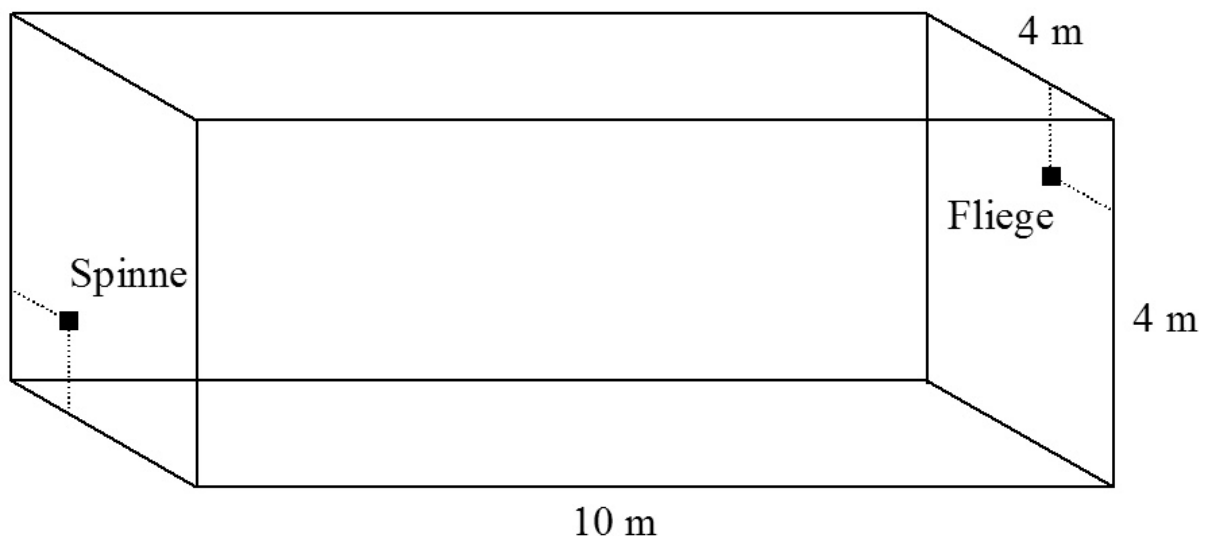
Es ist wichtig, dass keine der fünf Tafeln weiter geführt wird, als 31. Denn mit den ersten 5 Blöcken aus dem Binärsystem können alle Zahlen bis 31 eindeutig dargestellt werden. Sucht sich der Gegenüber nun die 32 als Zahl aus, so muss er sagen, dass sie auf keiner Tafel steht und sofort ist klar welche Zahl er gewählt hat, auch wenn hier nicht das Binärsystem greift, sondern simpelste Logik.

Natürlich lässt sich der Trick auch mit nur 4 Tafeln durchführen. Allerdings erlaubt dies dann nur Zahlen zwischen 1 und 15 bzw. 16. Um den Trick noch verblüffender zu machen und jeden Gedanken zu vertreiben man hätte alle Kombinationen nur auswendig gelernt, kann man das ganze auch mit 6 oder 7 Tafeln machen. Allerdings werden die Tafeln dann schon recht groß, da sie die Zahlen bis 63 bzw. bis 127 enthalten müssen, was aber eben auch ein Erraten der Zahlen bis 64 bzw. 128 möglich macht. Also am besten schon etwas vorher auf den Trick vorbereiten, die entsprechenden Tafeln anfertigen und das Erstaunen von jeglichem Publikum ist einem fast sicher.

Die Spinne und die Fliege

Die Situation:

Stellen sie sich vor, wir haben einen ganz normalen Rechteckigen Raum, also mathematisch betrachtet einen Quader. Dieser sei nun 10 Meter lang, 4 Meter breit und 4 Meter hoch. Weiter befinden sich in dem Raum ein Spinne und eine Fliege. Die Fliege sitzt an der rechten Seitenwand des Raumes, einen halben Meter unterhalb der Decke und einen halben Meter von der vorderen Wand entfernt. Die Spinne sitzt an der linken Seitenwand einen halben Meter über dem Boden und einen halben Meter von der Hinterwand entfernt. Nun möchte die Spinne natürlich die Fliege fressen. Doch dazu muss sie möglichst schnell auf die andere Seite zum Standort der Fliege gelangen, oder anders gesagt den kürzesten Weg dahin wählen. Doch wo entlang muss die Spinne, die weder Fliegen, noch springen kann, sondern nur laufen, gehen?



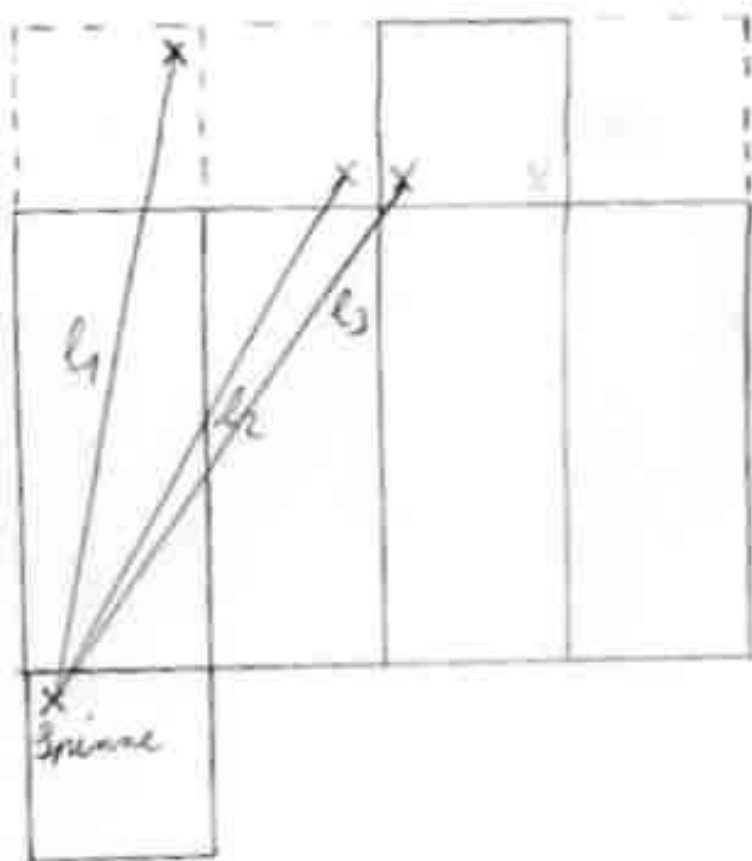
Die Vorgehensweise:

Jeder Mensch weiß, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist. So wäre auch hier der kürzeste Weg zwischen Spinne und Fliege eine Gerade. Doch leider kann nur die Fliege fliegen und nicht die Spinne. Also ist diese Gerade schon mal unbrauchbar für unsere Aufgabe. Aber erinnern wir uns doch mal an den Bastelunterricht in der Grundschule zurück. Dort hat man auf einem Blatt ein komisches Netz bekommen, welches man dann

ausschneiden und zusammenkleben musste, und am Ende kam ein Würfel oder ähnliches dabei raus. Genau dies kann man aber auch rückwärts machen. Man zerlegt den Quader durch gezielte Schnitte und auseinanderfalten wieder in ein Netz. In diesem Netz kann man dann eine Gerade zwischen Spinne und Fliege ziehen, die die Spinne auch tatsächlich gehen kann, und somit den kürzesten Weg bestimmen.

Es gibt natürlich mehrere Möglichkeiten einen Quader in ein Netz zu zerlegen. Und natürlich sehen die Gerade dann auch immer anders aus und haben eine andere Länge. Im folgenden befindet sich eine Zeichnung, in der die drei kürzesten Wege eingezeichnet sind. Bei anderen Zerlegungen, welche keine Spiegelungen sind, kommen weit längere Wege zu Stande.

Die Skizze:



Die Weglängen:

Wir wissen nun von unserem Netz, dass die mittlere Fläche immer 10 Meter lang ist und 4 Meter breit. Genau wie die kleinen Ecken neben immer 4x4 Meter groß sind. Weiter sind sowohl Fliege als auch Spinne einen halben Meter von der nächsten Kante entfernt.

Damit ergibt sich für den direkten Weg, also die Länge L1, mit Hilfe des Satz von Pythagoras folgendes:

$$L1 = \sqrt{(0,5 + 10 + 3,5)^2 + (4 - 0,5 - 0,5)^2} = 14,32$$

Für L2 gilt:

$$L2 = \sqrt{(0,5 + 10 + 0,5)^2 + (3,5 + 3,5)^2} = 13,04$$

Für L3 gilt:

$$L3 = \sqrt{(0,5 + 10 + 0,5)^2 + (3,5 + 4 + 0,5)^2} = 13,6$$

Somit wird klar, dass nicht etwa der Weg über den Boden der kürzeste Weg für die Spinne ist, sondern der Weg über den Boden und eine Seitenwand.

Also muss die Spinne nun 13,04 Meter zurücklegen um zur Fliege auf der gegenüberliegenden Seite zu kommen.

Die etwas andere Art des Multiplizierens

Wie wird multipliziert?

Zuerst schreibt man die beiden Zahlen, die es zu multiplizieren gilt, nebeneinander, möglichst mit der kleiner Zahl zuerst auf. Also zum Beispiel $14 * 21$

Nun schreibt man in die nächste Zeile darunter die Hälfte der ersten Zahl und das doppelte der zweiten. Also in unserem Beispiel $7 * 42$

In der dritten Zeile wird nun wieder das selbe gemacht. Die Hälfte der linken Zahl notiert und das doppelte der rechten, wobei zu beachten ist, dass die Nachkommastellen nicht beachtet werden und somit wegfallen. Aus 7 wird nun nicht 3,5 und auch nicht 4 sondern 3.

Damit steht in der dritten Zeile $3 * 84$

Für die vierte Zeile ergibt sich nach dem bekannten Schema $1 * 168$

Dies ist zugleich auch die letzte Zeile, denn wenn auf der linken Seite die Eins erreicht ist, ist unser vorgehen nach dem oberen Schema zu Ende.

Damit stehen nun folgende Zeile auf unserem Blatt:

$$14 * 21$$

$$7 * 42$$

$$3 * 84$$

$$1 * 168$$

Aber wie kommen wir nun mit dieser Zahlenreihe zu unserem Ergebnis der Multiplikation?

Eigentlich sehr simpel. Wir markieren zuerst mal diejenigen Zeilen, auf deren linken Seite eine ungerade Zahl steht. In unserem Fall also die zweite, die dritte und die vierte Zeile.

Jetzt addieren wir nur noch die jeweiligen rechten Zahlen dieser markierten Zeilen zusammen.

$$\text{Also } 42 + 84 + 168 = 294$$

Und schon haben wir das Ergebnis unserer Multiplikation. $14 * 21 = 294$

Wie funktioniert das?

Dazu müssen wir uns erstmal klarmachen, was eigentlich die Zahlen auf der rechten Seite bedeuten bzw. wie diese sich anders schreiben lassen:

$$14 * 21 = 14 * (1 * 21)$$

$$7 * 42 = 7 * (2 * 21)$$

$$3 * 84 = 3 * (4 * 21)$$

$$1 * 168 = 1 * (8 * 21)$$

Da wir aber ja das Ergebnis von $14 * 21$ wissen möchten, müssen wir jetzt noch die entsprechenden ($x * 21$) Zeilen addieren, aus denen sich die 14 basteln lässt. Also in unserem Fall aus den folgenden Zeilen, da $8 + 4 + 2 = 14$ ist:

$$7 * 42 = 7 * (2 * 21)$$

$$3 * 84 = 3 * (4 * 21)$$

$$1 * 168 = 1 * (8 * 21)$$

Teilt man nun die obere Gleichung durch 7, die mittlere durch 3 und lässt in der letzten das 1x weg, so erhält man

$$42 = 2 * 21$$

$$84 = 4 * 21$$

$$168 = 8 * 21$$

Nun addiert man nur noch die drei Zahlen auf der linken Seite zusammen und erhält das korrekte Ergebnis der Multiplikation, denn wenn man alle drei Gleichungen zusammenaddiert erhält man: $42 + 84 + 168 = 2 * 21 + 4 * 21 + 8 * 21$

Diese Gleichung lässt sich zusammenfassen zu

$$294 = 14 * 21$$

Ein weiteres Beispiel:

Da die Funktion dieses Multiplikationstricks nicht von der Größe der zu multiplizierenden Zahlen abhängt, können wir auch ruhig größere Zahlen wie 77 und 52 wählen.

Dann ergibt sich folgende Liste mit Zahlenpaaren

$$52 * 77 \quad \text{Zahl vorne ist gerade}$$

$$26 * 154 \quad \text{Zahl vorne ist gerade}$$

$$13 * 308 \quad \text{Zahl vorne ist ungerade}$$

$$6 * 616 \quad \text{Zahl vorne ist gerade}$$

$$3 * 1232 \quad \text{Zahl vorne ist ungerade}$$

$$1 * 2464 \quad \text{Zahl vorne ist ungerade}$$

$$\text{Somit ist } 52 * 77 = 308 + 1232 + 2464 = 4004$$

Warum der ganze Aufwand?

Auf den ersten Blick scheint dies alles sehr sehr viel Arbeit für eine einzige Multiplikation zu sein. Bis man die Liste aufgestellt hat und dann noch die Zahlen, je nach Größe, im Kopf oder schriftlich addiert hat, kann man das Ergebnis schon längst auf dem Papier haben, wenn man wie folgt schriftlich multipliziert:

$$52 * 77$$

$$3640$$

$$+ \quad 364$$

$$4004$$

Doch dieses Multiplikationsverfahren hat trotzdem seine Daseinsberechtigung. Denn was ist, wenn man, wie z.B. die alten Römer, die Zahlen nicht mit arabischen Ziffern, sondern mit römischen Zeichen notiert? Betrachten wird doch nun nochmals unser Beispiel vom Anfang:

14 * 21 oder in römischer Darstellung XIV * XXI

$$280$$

$$????$$

$$+ \quad 14$$

$$+ \quad ???? \\ \hline$$

$$294$$

$$????$$

Hier ist zu Erkennen, dass die alten Römer nicht die Möglichkeit hatten wie wir heute schriftlich zu multiplizieren. Aber da auch schon damals große Multiplikationen durchgeführt werden mussten und das komplette umschreiben in eine Addition, also bei 14 * 21 in 21+21+21+21+21+21+21+21+21+21+21+21+21+21, zu aufwendig war, wurde diese Art des Multiplizierens entwickelt, in der nur ganz einfache Multiplikationen und Divisionen vorkam, welche leicht im Kopf zu berechnen waren. Und die anschließende Addition war dann wieder kein Problem für die Römer. So schrieben sie bei 14 * 21 folgendes auf:

$$\text{XIV} * \text{XXI}$$

$$\text{VII} * \text{XLII}$$

$$\text{III} * \text{LXXXIV}$$

$$\text{I} * \text{CLXVIII}$$

Jetzt mussten sie nur noch XLII + LXXXIV + CLXVIII rechnen und erhielten im

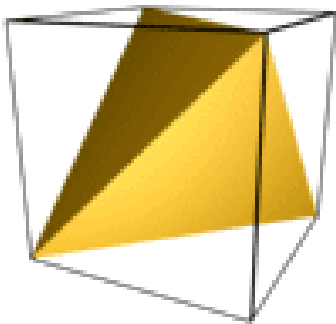
Endergebnis: XIV * XXI = CCXCIV

Der Tetraeder im Würfel:

Die Lage:

In einem Würfel mit der Kantenlänge a befindet sich ein regelmäßiger Tetraeder, der so gewählt ist, dass er möglichst viel Volumen des Würfels einnimmt.

Also ergibt sich für unsere Ausgangssituation folgendes Bild:



Die Frage:

Nun ist der Anteil des Würfelvolumens gesucht, welcher vom Tetraeder eingenommen wird. Wie groß ist dieser und wie kann ich dieses möglichst günstig ausrechnen ohne irgendwelche Längen messen oder abschätzen zu müssen?

Die Vorgehensweise:

Zu Beginn ist die einzige uns bekannte Länge die Länge des Würfels, welcher den Tetraeder umgibt. Damit lässt sich zunächst ganz einfach und simpel nach der allgemein bekannten Formel für das Volumen eines Würfels $V = a^3$, das Volumen des Umgebungswürfels bestimmen.

Doch wie lautet die Formel für das Volumen von einem Tetraeder? Und wie komme ich an die einzelnen Längen im Tetraeder?

Diese Fragen lassen sich umgehen. Schließlich gibt es nicht nur die Möglichkeit das gesuchte Verhältnis über das Volumen zu finden, das der Tetraeder ausfüllt, sondern es gibt auch die Möglichkeit das Pferd von der anderen Seite her aufzuzäumen.

Die Hilfsfrage:

Welchen Anteil des Würfelvolumens nimmt der darin befindliche Tetraeder **nicht** ein?

Um dieses Volumen bestimmen zu können, müssen wir uns erst einmal klar machen, welche Teile des Würfels nicht vom Tetraeder ausgefüllt werden. Betrachten wir unseren Würfel von oben, so sehen wir zwei Pyramiden, dessen begrenzenden Flächen jeweils Dreiecke sind.

Allerdings sind diese beiden Pyramiden nicht die einzigen Flächen, die wir betrachten müssen, schließlich gibt es diese beiden Pyramiden auch nochmals auf der unteren Seite, nur dort in den anderen beiden Ecken.

Somit haben wir vier kongruente Pyramiden, welche von unserem Tetraeder nicht abgedeckt werden. Also reicht es logischerweise, wenn wir die das Volumen von einer dieser Pyramiden ausrechnen. Wir wissen, das für das Volumen einer beliebigen Pyramide gilt: $V = \frac{1}{3} * G * h$
In unserem Fall ist die Grundfläche genau die Hälfte der Fläche des oberen Quadrates.

Also $G = \frac{1}{2} * a^2$. Unsere Höhe h der Pyramide können wir auch direkt am Modell erkennen. Diese entspricht nämlich wieder genau der Kantenlänge des Würfels, also $h = a$.

Nun müssen wir beide Erkenntnisse nur noch in unsere Grundformel einsetzen und erhalten:

$$V = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} * a^2 * a = \frac{1}{6} a^3$$

Da wir aber diese Pyramide viermal in unserem Würfel vorfinden erhalten wir für das

Gesamtvolumen, welches nicht vom Tetraeder ausgefüllt ist $V = \frac{4}{6} a^3 = \frac{2}{3} a^3$.

Die Lösung:

Damit bleibt für das Volumen des Tetraeders nur noch der Rest unseres Würfels, nämlich

$$V = a^3 - \frac{2}{3} a^3 = \frac{1}{3} a^3$$

Damit lautet die Antwort auf unsere Anfangsfrage: Genau ein Drittel des Würfelvolumens wird vom Tetraeder ausgefüllt.

Die Probe:

Natürlich können wir das Ergebnis unserer Vorgehensweise jetzt nochmals überprüfen und das Volumen des Tetraeders direkt ausrechnen. Schließlich ist ein Tetraeder auch nur eine Sonderform der Pyramide aus Dreiecksflächen. Allerdings müssen wir nun erstmal die Kantenlänge des Tetraeders herausfinden. Die funktioniert mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreieckes und dem Satz des Pythagoras. So entspricht die Kantenlänge k des Tetraeders genau der Länge der Diagonalen der oberen Würfelfläche.

Also gilt für k: $k = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} * a$

Da ein Tetraeder aus gleichseitigen Dreiecken der Kantenlänge k besteht gilt nun für die Höhe

unserer Grunddreiecksfläche $h = \frac{\sqrt{3}}{2} k$

Somit gilt hat unsere Grundfläche nach der Formel $A = \frac{1}{2} * g * h$

$$G = \frac{\sqrt{3}}{4} k^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} * 2 * a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

Nun fehlt noch die Höhe H des Tetraeders. Auch diese ergibt sich wieder durch konsequentes

anwenden vom Satz des Pythagoras. $H^2 = h^2 - \left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{3}{4}k^2 - \frac{1}{9} * \frac{3}{4}k^2 = \frac{2}{3}k^2$

Somit ist $H = \sqrt{\frac{2}{3}} k$

Dies setzen wir nun wieder alles in die allgemeine Volumenformel einer Pyramide ein und

$$\text{erhalten: } V = \frac{1}{3} * \frac{\sqrt{3}}{4} k^2 * \sqrt{\frac{2}{3}} * k = \frac{\sqrt{2}}{12} k^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} * (\sqrt{2} * a)^3 = \frac{1}{3} a^3$$

Damit wird deutlich, dass unser Rechenweg von oben sowohl mathematisch zum richtigen Ergebnis führt als auch eine Menge an Rechenarbeit und Wurzelspielen erspart.

Der Würfel im Farbeimer

Das Problem:

Wir betrachten einen ganz normalen, großen Würfel. Nun sei dieser Würfel in kleinere Unterwürfel unterteilt. Und zwar genau in je drei Unterwürfel in der Länge, in je drei Unterwürfel in der Breite und auch in je drei Unterwürfel in der Höhe.

Damit erhalten wir nun einen Würfel, der in insgesamt 27 Unterwürfeln besteht.

Ein Beispiel für einen solchen Würfel sind sogenannte „Magic Cubes“, bei denen man durch drehen versucht jede Seite des Würfels komplett aus Unterwürfeln der gleichen Farbe zu bekommen. Zeichnerisch sieht der Würfel wie folgt aus:

Nun stelle man sich vor, ein solcher Würfel fällt in einen Eimer mit roter Farbe. Nach dem Herausfischen stellt sich nun die Frage, wie viele der Unterwürfel sind komplett rot, wie viele ganz unberührt von der Farbe, wie viele Unterwürfel haben nur eine Seite rot, wie viele haben zwei Seiten rot usw.

Die Lösung:

Durch ein klein wenig nachdenken wird jedem klar, dass nur die Flächen mit der Farbe in Berührung kommen, die nach außen zeigen. Somit ist es schon mal ausgeschlossen, dass ein Unterwürfel nach dem Bad im Farbeimer komplett rot ist. Schließlich können nicht alle sechs Seiten des Würfels nach außen zeigen. Aber damit lassen sich auch noch zwei andere Fälle ausschließen. Denn ebenfalls unmöglich ist, dass fünf oder vier Seiten gleichzeitig nach außen zeigen. Die maximale Anzahl an nach außen zeigenden Seiten eines Unterwürfels und somit Seiten, die die rote Farbe abbekommen ist drei. Und welche Unterwürfel haben so viele Seiten außen? Betrachten wir uns doch nochmals unser Modell. Von dem kleinen Würfel oben links zum Beispiel gehört eine Seite zur oberen Außenfläche des großen Würfels, eine Seite zur linken Außenseite und eine Seite zur vorderen Außenseite. Somit hat dieser Unterwürfel genau drei nach außen zeigende Seiten. Ebenso der Würfel oben rechts, aber auch der unten links und der unten rechts. Und zusätzlich noch genau diese vier Würfel auf der Rückseite des großen Würfels. Kurz gesagt, alle acht kleine Würfel, die an den acht Ecken des großen Würfels liegen, haben drei nach außen zeigende Seiten und somit drei rot gefärbte Flächen.

Nun suchen wir Unterwürfel, die zwei rote Flächen haben. Dazu müssen natürlich auch genau zwei Seiten dieses kleinen Würfels nach außen zeigen. Aber wo ist dies der Fall? Die Ecken des großen Würfels haben wir ja schon abgearbeitet, also dürfen sie dort nicht liegen, aber sie müssen an einer Kante liegen um die Bedingung erfüllen zu können. Wenn wir wieder unser Modell anschauen stellen wir fest, dass jede Kante des großen Würfels aus drei kleinen Würfeln besteht. Aber zwei dieser Würfel liegen in eine Ecke des großen Würfels und fallen somit für unsere Rechnung weg. Bleibt also noch ein kleiner Würfel mit zwei roten Seiten pro Kante des großen Würfels. Und da ein Würfel bekanntlich zwölf Kanten hat, macht das insgesamt zwölf solcher Unterwürfel.

Weiter geht es mit den kleinen Würfeln, bei denen nur eine einzige Fläche rot geworden ist. Ecken und Kanten des großen Würfels haben wir ja nun schon abgearbeitet. Bleiben noch die Unterwürfel übrig, die zwar von außen zu sehen sind, aber die weder in einer Ecke noch an einer Kante liegen. Betrachten wir nun wieder unser Modell, so stellen wir sehr schnell fest, dass dies pro Seite des großen Würfels nur genau ein einziger Unterwürfel ist, nämlich derjenige, der sich in der Mitte dieser Außenfläche befindet. Und da ein Würfel genau sechs Seiten hat, gibt es genau sechs kleine Würfel, bei denen nur eine einzige Seite mit der Farbe in Berührung gekommen ist.

Zum Schluss fehlen jetzt nur noch diejenigen Unterwürfel, die gar keine Seite außen haben. Also die Würfel, die in der Mitte des großen Würfels sind, und komplett von anderen Unterwürfeln umgeben sind. Mit Blick zu unserem Modell wird nun ganz schnell klar, dass dies nur ein einziger Würfel ist, nämlich der, der sich genau in der Mitte des großen Würfels befindet. Er grenzt auf jeder Seite an einen anderen Unterwürfel und kommt somit an keiner Stelle mit der roten Farbe in Kontakt.

Die Probe:

Um nun zu prüfen ob wir auch keinen Würfel vergessen haben, können wir einfach alle diejenigen kleinen Würfel addieren, die nach unserer Liste drei, zwei, eine oder keine rote Seite besitzen und schauen, ob dabei als Ergebnis die Gesamtzahl der Unterwürfel herauskommt.

Wir haben gezählt:

8 Würfel mit drei roten Seiten

12 Würfel mit zwei roten Seiten

6 Würfel mit einer roten Seite

1 Würfel mit keiner roten Seite

$$8 + 12 + 6 + 1 = 27 = 3 * 3 * 3$$

Somit ist unsere Liste sehr wahrscheinlich richtig, da ja unser großer Würfel genau aus 27 kleineren Unterwürfeln besteht.

Verallgemeinerung:

Nun kann man das ganze natürlich auch mit Würfeln machen, die nicht nur in $3 \times 3 \times 3$ Unterwürfel unterteilt sind sondern auch in $4 \times 4 \times 4$ Würfel oder in $N \times N \times N$ Unterwürfel.

Um zu unserer ganz allgemeinen Lösung zu kommen betrachten wir doch erstmal den $4 \times 4 \times 4$ Würfel. Wie viele Unterwürfel mit drei roten Seiten gibt es hier? Wie viele mit zwei? Wie viele mit einer und wie viele mit keiner?

Es gelten auch hier wieder die gleichen Bedingungen wie bei unserem $3 \times 3 \times 3$ Beispiel von oben. Und da die Anzahl der Ecken eines Würfels sich durch Änderung der Unterteilung nicht ändert, besitzt auch ein $4 \times 4 \times 4$ Würfel genau acht Unterwürfel mit drei roten Seiten.

Unsere Kanten des Würfels sind jetzt allerdings nicht mehr nur drei, sondern vier Unterwürfel lang, aber weiterhin liegen nur zwei dieser Unterwürfel in einer Ecke. Somit haben wir nun für jede Kante des großen Würfels zwei kleine Würfel mit zwei roten Seiten. Macht insgesamt $12 * 2 = 24$ solcher Würfel.

Für die Unterwürfel mit einer roten Fläche gilt weiter die Bedingung, dass sie an einer Außenfläche liegen müssen, aber weder in einer Ecke noch an einer Kante. Bei dem $4 \times 4 \times 4$ Würfel gibt es davon auf jeder Seite des Würfels vier Stück, also insgesamt 24.

Im Inneren unseres Würfels liegen jetzt schon acht Unterwürfel, nämlich in den zwei mittleren Ebenen des Würfels jeweils die vier Unterwürfel in der Mitte.

Macht zusammengefasst:

8 Würfel mit drei roten Seiten

24 Würfel mit zwei roten Seiten

24 Würfel mit einer roten Seite

8 Würfel mit keiner roten Seite

$$8 + 24 + 24 + 8 = 64 = 4 * 4 * 4$$

Nun kann man leicht die allgemeine Formel für den $N \times N \times N$ Würfel aufstellen:

8 Würfel mit drei roten Seiten

$12 * (n-2)$ Würfel mit zwei roten Seiten

$6 * (n-2)^2$ Würfel mit einer roten Seite

$(n-2)^3$ Würfel mit keiner roten Seite

Der Multiplikationstrick mit den Händen

Was passiert?

Durch ausstrecken bzw. wegklappen einzelner Finger lässt sich das Ergebnis von Multiplikationen sehr viel einfacher und wesentlich anschaulicher erhalten als durch die Multiplikation selbst.

Für welche Multiplikationen geht dies?

Nur im Zahlenbereich von $6 \cdot 6$ bis zu $10 \cdot 10$

Welche Finger muss ich ausstrecken und welche wegklappen?

Jede der beiden Zahlen wird mit Hilfe von einer Hand dargestellt.

Jede Hand hat per se den Wert 5 und jeder ausgestreckte Finger erhöht diesen Wert um 1.

So stellt man zum Beispiel die Zahl 8 mit drei ausgestreckten und zwei weggeklappten Fingern da, die Zahl 6 mit einem ausgestreckten und vier weggeklappten.

Wie komme ich nun auf mein Ergebnis?

Zuerst stellt man die beiden zu multiplizierenden Zahlen jeweils mit einer Hand da.

Nun betrachtet man die ausgestreckten Finger. Alle ausgestreckten Finger zusammen ergeben die Anzahl der Zehner im Ergebnis.

Bleiben noch die weggeklappten Finger. Hier multipliziert man die weggeklappten Finger der einen Hand mit denen der anderen Hand und erhält als Ergebnis dieser Multiplikation die Zahl der Einer im Ergebnis der gesamten Multiplikation.

Beispiel an Hand der Multiplikation von $7 \cdot 8$:

Stelle 7 mit der linken Hand da → Zwei Finger ausgestreckt, drei weggeklappt

Stelle 8 mit der rechten Hand da → Drei Finger ausgestreckt, zwei weggeklappt

Ermitteln der Zehner: Zwei ausgestreckte Finger links und drei ausgestreckte Finger rechts, macht zusammen fünf ausgestreckte Finger; also fünf Zehner.

Ermitteln der Einer: drei weggeklappte links * zwei weggeklappte rechts → sechs Einer

Endergebnis der Multiplikation: fünf Zehner + sechs Einer macht zusammen 56

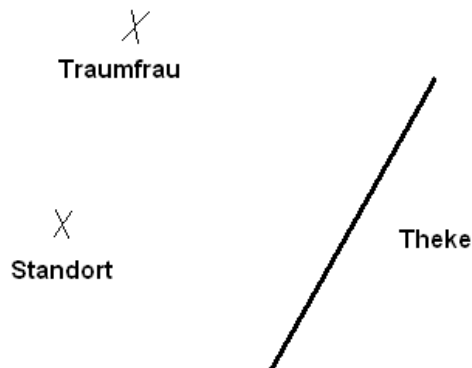
Also $7 \cdot 8 = 56$

Der kürzeste Weg

Das Szenario:

Stellen sie sich vor, es ist Samstag Abend und sie sind mal wieder in ihrer Lieblingsdiskothek auf der Suche nach ihrer Traumfrau. Und tatsächlich, so unwahrscheinlich es klingen mag, heute Abend ist sie da. Sie steht einfach so da und scheint nur auf sie zu warten. Also nicht wie hin in die Ecke zu ihr. Aber halt! Doch nicht einfach so mit leeren Händen bei ihr auftauchen und ungelenkt anfangen zu flirten. Erst noch kurz zur Theke und ihr was zu trinken mitbringen. Aber auf keinen Fall zu lange brauchen, sonst schnappt Dir am Ende noch irgendeiner die Frau weg. Also einfach den kürzesten Weg wählen. Doch was ist der kürzeste Weg?

Die Lage:



Mathematische Betrachtung:

Gesucht ist hier der kürzeste Weg vom Standort aus zu einem beliebigen Punkt an der Theke und von dort dann zur Traumfrau. Doch wie finde ich diesen Weg?

Legen wir doch einfach mal möglichst günstig ein Koordinatensystem in unsere Zeichnung. Als x-Achse wählen wir dazu die Theke, die y-Achse steht natürlich senkrecht dazu. Damit haben nun sowohl ihr Standort ($a \mid b$), als auch der Standort ihrer Traumfrau ($c \mid d$) ganz bestimmte Koordinaten. Der Punkt, an dem sie an die Theke treten, ist ja noch nicht bekannt und hat somit auch noch keine festen Koordinaten. Allerdings haben wir ja unsere x-Achse genau entlang der Theke gelegt, so dass jeder Punkt an der Theke die y-Koordinate 0 hat. Damit gilt für unseren Auftreffpunkt auf die Theke die Koordinate ($x \mid 0$).

Mit Hilfe der Koordinaten und unserem Wissen über Vektorrechnung können wir nun versuchen die Längen der einzelnen Strecken auszurechnen. Die Länge unserer Strecke im Koordinatensystem ist nichts anderes als der Betrag des Vektors, der von einem Punkt zum anderen führt. Somit ergibt sich für die Strecke vom Standort zur Theke folgendes:

$$\sqrt{(a-x)^2 + b^2}$$

Für die Strecke von der Theke zur Traumfrau gilt: $\sqrt{(c-x)^2 + d^2}$

Also ist unsere Gesamtstrecke: $\sqrt{(a-x)^2 + b^2} + \sqrt{(c-x)^2 + d^2}$

Da ja nun unsere Strecke möglichst kurz sein soll, müssen wir nun für diese Funktion ein Minimum finden. Dazu bilden wir die erste Ableitung und suchen dort die Nullstelle.

$$f'(x) = -\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}}$$

Machen wir doch mal an einem Beispiel weiter:

Beispiel:

Ersetzen wir die vielen Unbekannten nun doch mal durch konkrete Zahlen. Sei also der aktuelle Standpunkt (1 | 3), der Standort ihres Zieles (4 | 4) und unser Punkt an der Theke (x | 0).

Somit ergibt sich für unsere Ableitung $-\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + 3^2}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2 + 4^2}}$

Die Nullstelle lässt sich hier ganz einfach mit einem Programm errechnen.

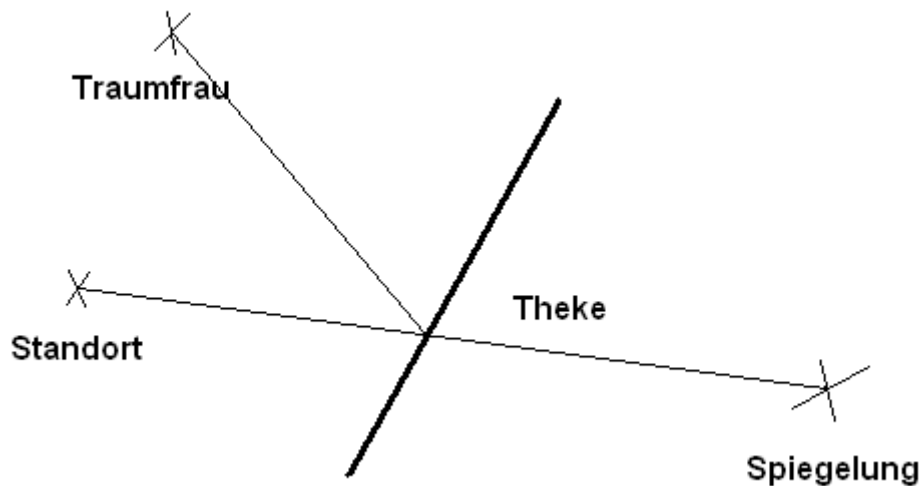
Sie ergibt sich zu $\frac{16}{7}$.

Somit muss unser Auftreffpunkt auf die Theke für einen möglichst kurzen Weg ($\frac{16}{7}$ | 0) sein.

Geht das auch einfacher?

Der Weg mit einem Koordinatensystem, Punkten, Vektoren, Beträgen, Ableitungen, Nullstelle usw. ist sehr arbeitsaufwendig und schwer. Doch wie soll man anders auf die Lösung kommen? Dazu kann man einen ganz anderen, viel einfacheren Weg wählen. Wir wissen, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist. Allerdings ist die zu gehende Strecke keine Gerade. Zumindest nicht, wenn wir den Standort der Frau dort lassen, wo sie sich befindet. Aber was passiert, wenn wir diesen Punkt an unserer

Thekenachse spiegeln? Dann können wir eine Gerade zeichnen, die die Theke schneidet und die kürzeste Verbindung zwischen dem Standpunkt und der gespiegelten Position der Frau ist. Und da durch das Spiegeln die Strecke quasi nur umgeklappt wird, ist die Schnittpunkt dieser Gerade genau der Punkt, an dem wir auf die Theke treffen müssen um unseren Weg möglich kurz zu halten. So lässt sich uns Beispiel zeichnerisch lösen:



Aber auch rechnerisch wird es damit einfacher: Der Spiegelpunkt hat die Koordinaten $(4 \mid -4)$ und bildet mit $(1 \mid 3)$ eine Gerade, von der wir nur noch den Schnittpunkt mit der x-Achse ausrechnen müssen. Die Gerade ergibt sich zu $y = -\frac{7}{3}x + \frac{16}{3}$ und damit der Schnittpunkt wie über die Ableitungen zu $(\frac{16}{7} \mid 0)$.

Das Zahlenrätsel

Das Problem:

Man wähle eine beliebige 5-stellige Zahl und schreibe diese auf. Nun notiert man eine beliebige Permutation dieser Zahl (dies bedeutet eine Zahl, die genau die selben Zahlen enthält wie die gewählte, nur in neuer Reihenfolge). Jetzt subtrahiert man die kleinere Zahl von der größeren. Im Ergebnis kringelt man nun eine beliebige Zahl, abgesehen von Null, ein und nennt die übrigen Zahlen. Damit lässt sich nun die eingekringelte Zahl bestimmen.

Wie funktioniert das?

Im Prinzip ganz einfach. Man addiert nur die Zahlen, die einem genannt werden und ergänzt diese dann zur nächsten Zahl, die durch 9 teilbar ist. Die Zahl, die man noch ergänzen muss, ist die eingekringelte. Wenn die Addition schon eine durch 9 teilbare Zahl ergibt, so ist die 9 die eingekringelte Zahl.

Beispiel:

Wähle eine beliebige 5-stellige Zahl: 41379

Permutation dieser Zahl: 14397

Ergebnis der Subtraktion: 26982

Einkringeln einer bel. Zahl: 6

Addition der restlichen Zahlen: $2+9+8+2=21$

Erkennen der eingekringelten Zahl: $21+6=27$

Warum funktioniert das?

Grund hierfür ist eine Teilbarkeitsregel. Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 Teilbar ist. Falls die Zahl nicht durch 9 teilbar ist, so ist der Rest der Division genau der Rest, der auch bei der Division der Quersumme durch 9 bleibt.

Bei dem oben erklärten Vorgehen hat man zwei Zahlen mit der gleichen Quersumme, da die eine ja nur eine Permutation der anderen ist. Daraus folgt das beide Zahlen bei Division durch 9 genau den gleichen Rest besitzen. Nun findet aber ja noch die Subtraktion statt. Und diese bewirkt, dass das die beiden Reste verschwinden und so das Ergebnis zwangsläufig durch 9 teilbar sein muss. Diese Eigenschaft macht man sich nun zu nutze und ergänzt die genannten

Zahlen zur nächsten Neunerzahl und kann so direkt erkennen, welche Zahl eingekringelt wurde. Die Null oder die Neun muss man allerdings vom Einkringeln ausschließen, da man ansonsten nicht eindeutig sagen welche Zahl die Ausgewählte ist. Schließlich verändert die Null bzw. die Neun die Quersumme in Bezug auf die Teilbarkeit durch 9 nicht.

Gültigkeit der Teilbarkeitsregel:

Wähle eine beliebige Zahl: $41379 = 4 \cdot 10000 + 1 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 9 \cdot 1$

Bilde die Quersumme: $4+1+3+7+9 = 24$

Zahl – Quersumme: $4 \cdot 10000 + 1 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 9 \cdot 1$

$$\begin{aligned}
 & - (4 + 1 + 3 + 7 + 9) \\
 & = 4 \cdot 9999 + 1 \cdot 999 + 3 \cdot 99 + 7 \cdot 9
 \end{aligned}$$

Damit ist sofort erkennbar, dass das Ergebnis durch 9 teilbar sein muss.

Also gilt $n - QS(n)$ ist durch 9 teilbar.